جامعة البعث تحليل عقدي /1/ اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات الدورة الصيفية للعام الدراسي 2016-2017

السؤال الأول: (10+10+10=30درجة)

1"- أوجد جذور المعادلة $(x+i)^3+(x-i)^3=0$

2"- أوجد الجذران التربيعيان للعدد العقدي $z=-7-24i$.

3"- عين متى تكون الدالة $f(z)=z.\text{Re}\,z$ قابلة للاشتقاق .

السؤال الثاني : (10+10+10=30درجة)

1"- أثبت أنّ الدالة $u(x,y)=x(1-y)$ توافقية ثمّ أوجد مرافق توافقي لها

2"- اعتمادا" على الدوال العكسية أوجد جميع حلول المعادلة $\cos z=2$.

3"- أوجد جميع حلول المعادلة $e^z=1+i\sqrt{3}$

السؤال الثالث : (20+20=40 درجة)

1"- أوجد خيال المستقيم $y-x+3=0$ وفق التحويلة $w=z^2$

مع الرسم

2"- اعتمادا على صيغ تكامل كوشي أوجد قيمتي التكاملين الآتين

$$I_1=\int_{|z|=3}\frac{z-2}{(z+i)^3+(z-i)^3}dz \quad . \quad I_2=\int_{|z|=2}\frac{e^z}{z^3-2z^2+z}dz$$

انتهت الأسئلة ******************************

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

Scanned by CamScanner

الصفحة الأولى

حل السؤال الأول

١

$(x+i)^3 + (x-i)^3 = 0$

$x^3 + 3x^2 i - 3x - i + x^3 - 3x^2 i - 3x + i = 0$

$2x^3 - 6x = 0 \Rightarrow 2x\,(x^2-3) = 0$

إما $x_1 = 0$ أو $x^2 - 3 = 0 \Leftarrow x^2 = 3 \Leftarrow x_2 = \sqrt{3}$ ، $x_3 = -\sqrt{3}$

٢- نفرض أن $z = x+iy$ جذر تربيعي للعدد فيكون $x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i$

بالمطابقة نجد أن:

(1) $x^2 - y^2 = -7$

(2) $2xy = -24 \Rightarrow y = -\frac{12}{x}$ (3)

نعوض (3) في (1) فنجد

$x^2 - \frac{144}{x^2} = -7 \Rightarrow x^4 + 7x^2 - 144 = 0$

$(x^2+16)(x^2-9) = 0$

إما $x^2 + 16 = 0 \Leftarrow x^2 = -16$ مستحيلة

أو $x^2 - 9 = 0 \Leftarrow x^2 = 9 \Leftarrow x_1 = 3$ أو $x_2 = -3$.

$x_1 = 3 \Leftarrow y_1 = -4 \Leftarrow z_1 = 3 - 4i$

$x_2 = -3 \Leftarrow y_2 = 4 \Leftarrow z_2 = -3 + 4i$

٣- نفرض أن $z = x+iy$ و $w = u+iv$ فيكون

$u + iv = x^2 + ixy$

$u = x^2$ | $v = xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ | $\frac{\partial v}{\partial y} = x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ | $\frac{\partial v}{\partial x} = y$.

المشتقات الجزئية معرفة ومستمرة ومحققة شرطا كوشي ريمان فقط في النقطة $(0,0)$

$$\frac{\sin y \cos y}{\ldots} = \frac{2\,\text{sh}x\,\text{ch}x}{2\,\text{sh}^2x + 2\cos^2 y}$$

الصفحة الثانية

جواب السؤال الثاني:

أ-

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة وتحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - y \Rightarrow v = \int (1-y)\,dy + g(x)$$

$$v = y - \frac{y^2}{2} + g(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g'(x)$$

وبما أن $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$v = y - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + c$$

ج- لدينا $\cos z = 2$

$$z = \arccos 2$$

$$\arccos z = -i \log\left(z + i\sqrt{1 - z^2}\right)$$

$$z = \arccos 2 = -i \log\left(2 + i\sqrt{1-4}\right) = -i \log\left(2 + i\sqrt{-3}\right)$$

$$= -i \log\left(2 \pm i\sqrt{3}\right)$$

$$= -i \left[\text{Log}\left|2 \pm \sqrt{3}\right| + i\left(\pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right)\right]$$

$$= \pm\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) - i\,\text{Log}\left|2 \pm \sqrt{3}\right|$$

ب- نفرض $z = x + iy$

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

ومنه

$$e^x \cos y = 1 \qquad e^x \sin y = \sqrt{3}$$

بالتربيع والجمع نجد أن

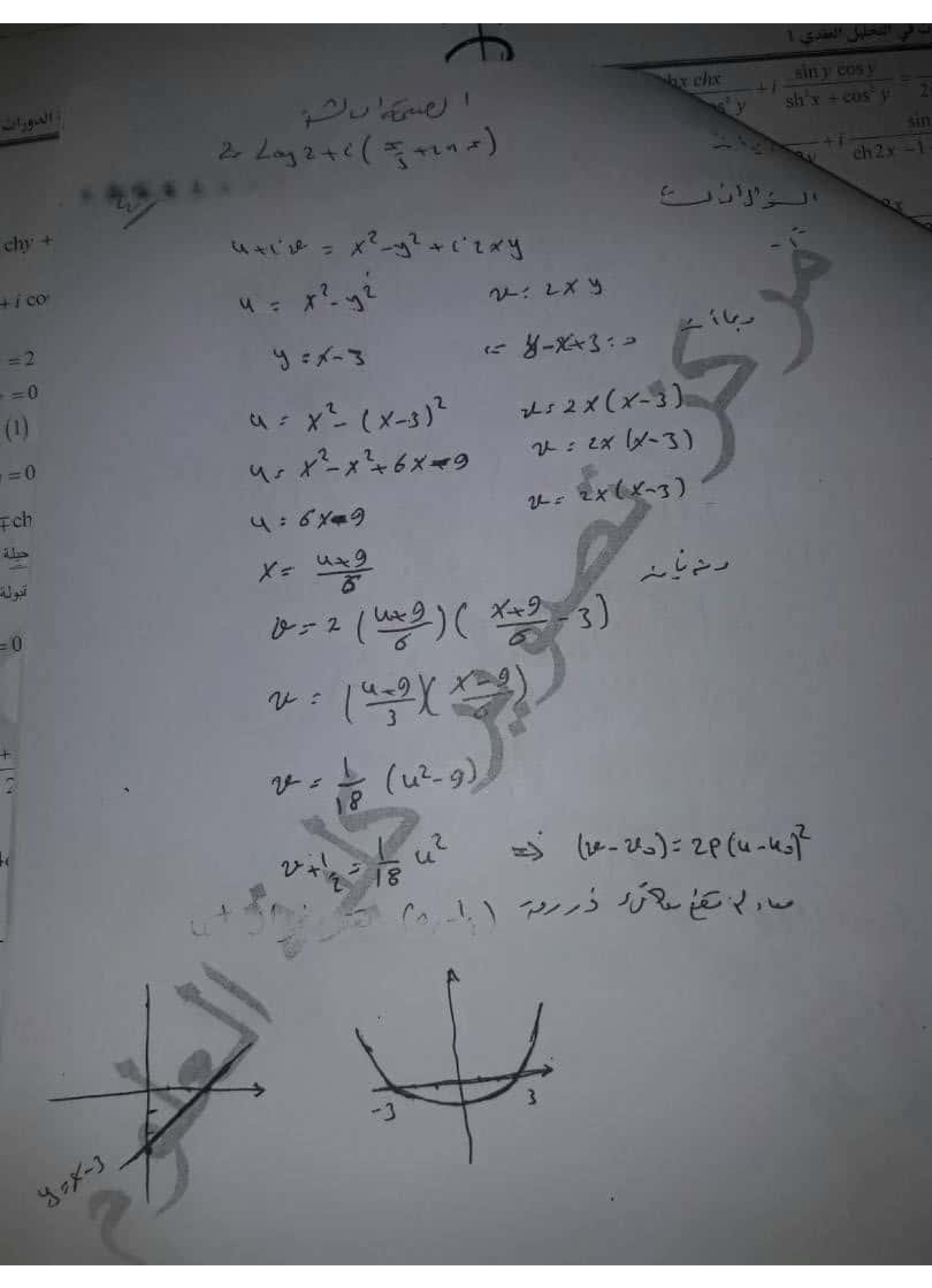
$$e^{2x} = 4 \Rightarrow 2x = \text{Log}\,4 \Rightarrow x = \text{Log}\,2$$

بقسمة المعادلتين

$$2\sin y = \sqrt{3} \qquad 2\cos y = 1$$

أو أن $y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi$

$$z = x + iy \Rightarrow z = \text{Log}\,2 + \ldots$$



السؤال الثالث

$2\,\mathrm{Log}\,2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$

$u + iv = x^2 - y^2 + i\,2xy$

$u = x^2 - y^2 \qquad v = 2xy$

$y = x - 3 \qquad \Leftarrow y - x + 3 = 0$

$u = x^2 - (x-3)^2 \qquad v = 2x(x-3)$

$u = x^2 - x^2 + 6x - 9$

$u = 6x - 9$

$x = \frac{u+9}{6}$

$v = 2\left(\frac{u+9}{6}\right)\left(\frac{u+9}{6} - 3\right)$

$v = \left(\frac{u+9}{3}\right)\left(\frac{u-9}{6}\right)$

$v = \frac{1}{18}(u^2 - 9)$

$v + \frac{1}{2} = \frac{1}{18}u^2 \quad \Rightarrow \quad (v - v_0) = 2p(u - u_0)^2$

معادلة قطع مكافئ ذروته $(0, -\frac{1}{2})$

$$\sin z = 3 \Rightarrow z = \arcsin(3)$$

$$\arcsin(\omega) = -i \log\left(i\omega + \sqrt{1-\omega^2}\right)$$

$$\arcsin(3) = -i \log\left(3i + \sqrt{1-(3)^2}\right) = -i \log\left(3i \pm i\, 2\sqrt{2}\right) = -i \log\left[i\left(3 \pm 2\sqrt{\right.\right.$$

$$\log\left[i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right] = \log\left|i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= \log\left(3\pm 2\sqrt{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \;;\; n = 0, \pm 1, \ldots$$

$$\arcsin(2) = -i \log\left[i\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)\right] = -i \log\left(3\pm 2\sqrt{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \log\left(\frac{1}{3\pm 2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \log\left(\frac{3\mp 2\sqrt{2}}{9-8}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \log\left(3\mp 2\sqrt{2}\right)$$

المعادلة المعطاة هي:

$$z = \arcsin(3) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \log\left(3\mp 2\sqrt{2}\right) \;;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ـــ ✪ ـــ

ي طريقة الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة: $\sin z = 2$.

$$\sin z = 2 \Rightarrow z = \arcsin(2)$$

$$\arcsin(\omega) = -i \log\left(i\omega + \sqrt{1-\omega^2}\right)$$

$$\arcsin(2) = -i \log\left(2i + \sqrt{1-(2)^2}\right) = -i \log\left(2i \pm i\sqrt{3}\right) = -i \log\left[i\left(2\pm \sqrt{\right.\right.$$